Subject: ۹۸/۷/۲

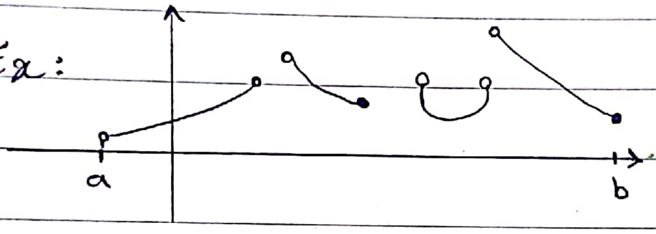
Year: 1 Month: Date:

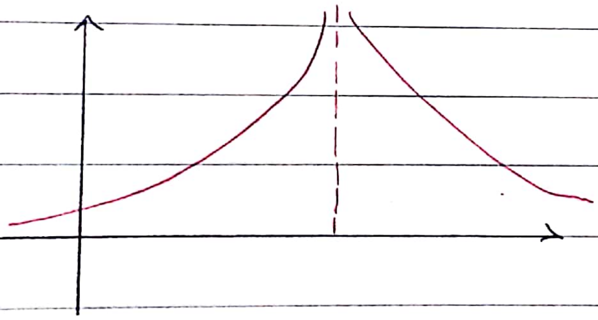
جلسه اول

تابع پیوسته قطعه‌ای:

تعریف: تابع $f(x)$ را روی بازه‌ی (a,b) پیوسته قطعه‌ای گوییم هرگاه نقاط $t_0, t_1, \dots, t_n \in (a,b)$ موجود باشند به طوری که در این نقاط پیوسته باشند. (حد راست و حد چپ) موجودند.

مثال: Ex:





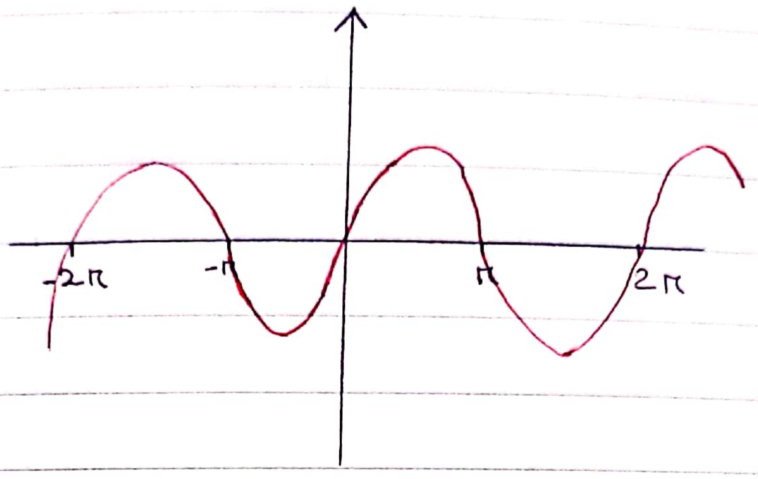
تابع متناوب:

تعریف: تابع $f(x)$ را متناوب با دوره تناوب T گوییم هرگاه برای هر $x \in D_f$

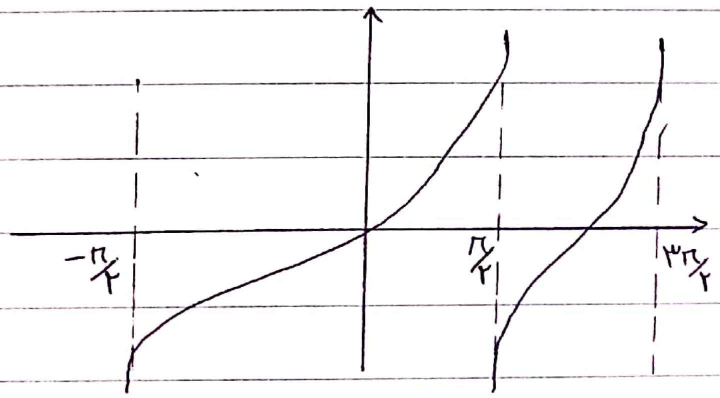
و $x+T \in D_f$ و $f(x+T) = f(x)$.

Subject:
Year: ۱ Month: Date:

Ex: $F(x) = \sin x$ $T = 2\pi$

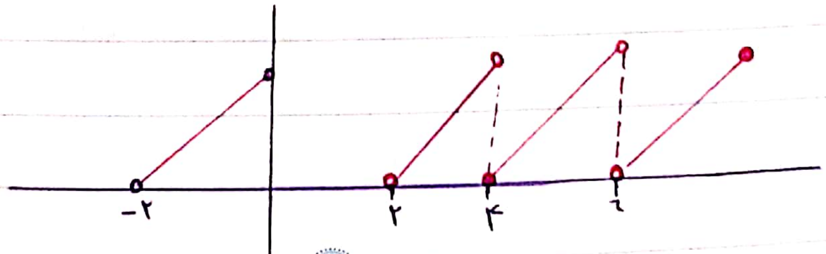


Ex: $F(x) = \cos x$ $T = 2\pi$



$F(x) = x$

$F(x+۲) = F(x)$



SAHEL NOTEBOOK

Scanned by CamScanner

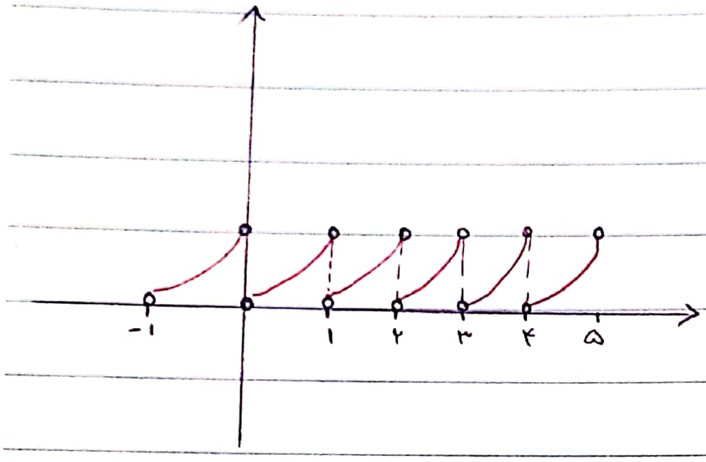
Subject:
Year: ۳ Month: Date:

Ex: $f(x) = x^۲$ $T = 1$

$f(x+1) = f(x)$

$f(0) = 0$

$f(1) = 0$



(f اعداد صحیح صفر است)

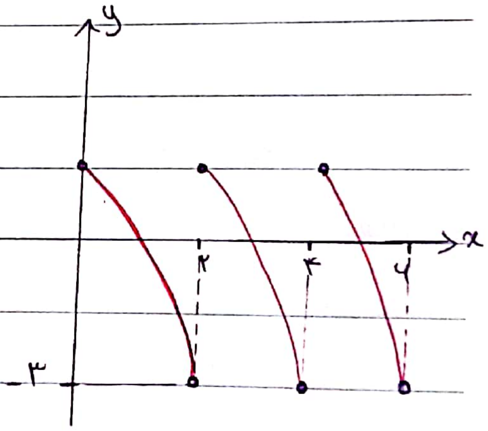
$$f(x) = \begin{cases} x^۲ & 0 \leq x < 1 \\ f(x+1) & x \geq 1 \\ & x < 0 \end{cases}$$

Ex: $\begin{cases} f(x) = 1 - x^۲ \\ f(x+۲) = f(x) \end{cases}$

$f(۲) = 1 - ۲^۲ = -۳$

$f(1) = 1 - 1^۲ = 0$

$f(0) = 1 - 0 = 0$



تابع زوج و فرد:

تعریف:

$f(-x) = f(x)$ زوج

$f(-x) = -f(x)$ فرد (بسته به مسئله متفاوت نیز است)

$f(x) = x + x^۳ + x^۷$ فرد

حاصل ضرب دو فرد است.

حاصل زوج باشد زوج است.

اگر فرد باشد زوج است.

Subject:
Year: ۴ Month: Date:

$f(x)$ تابع اولیه $F(x)$
(یا دمشتق)
هرگاه
$F'(x) = f(x)$

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c$$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad (n \neq -1)$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + c$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + c$$

فرض کنیم $F(x)$ یک تابع اولیه $f(x)$ باشد در این صورت :

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

$$\int_0^{2\pi} \sin x\,dx = -\cos x\Big|_0^{2\pi} = -\cos 2\pi - (-\cos 0) = -1 + 1 = 0$$

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$$ ← اگر f فرد باشد.

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$$ ← اگر f زوج باشد.

SAHEL NOTEBOOK

Scanned by CamScanner

Subject:
Year: ۵ Month: Date:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \, dx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \, dx = \begin{cases} 2\pi & m = 0 \\ 0 & m \neq 0 \end{cases} = \frac{1}{m} \sin mx \Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$\frac{1}{m} \sin m\pi - \frac{1}{m} \sin(-m\pi)$$

فرد × زوج = حاصل ضرب یک تابع فرد

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \, \cos mx \, dx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, \cos mx \, dx = \frac{1}{2} \int [\cos(m+n)x + \cos(m-n)x] \, dx$$

$$\begin{cases} \pi & m = n \quad m \neq 0 \\ 0 & m \neq n \quad n \neq 0 \end{cases}$$

$$\cos a \, \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$

تمرین:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \, \sin mx \, dx = ?$$

$$n \neq m \quad I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} [\cos(n-m)x - \cos(n+m)x] \, dx$$

SAHEL NOTEBOOK

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{n-m} \sin(n-m)x - \frac{1}{n+m} \sin(n+m)x \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

Scanned by CamScanner

Subject: ۹۸/۷/۱۳
Year: ٦ Month: Date:

جلسه دوم

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\cos(a-b) - \cos(a+b) = ۲ \sin a \sin b$$

$$\sin a \sin b = \tfrac{1}{۲}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$

$$\cos a \cos b = \tfrac{1}{۲}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$

$$\sin a \cos b = \tfrac{1}{۲}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$$

ادامه جواب تمرین قبل:

$$n=m \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin^{۲} nx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-\cos ۲nx}{۲} dx$$

$$= \left(\tfrac{1}{۲}x - \frac{1}{۴n} \sin ۲nx\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} = \left(\frac{\pi}{۲} - \frac{1}{۴n} \sin ۲n\pi\right) - \left(-\frac{\pi}{۲} - \frac{1}{۴n} \sin ۲n(-\pi)\right) = \pi$$

SAHEL NOTEBOOK

Scanned by CamScanner

Subject:

Year: ۷ Month: Date:

مثال: دوره تناوب $f(x) = \sin wx$ چیست؟

$f(x) = \cos wx$

جواب $P = \frac{۲\pi}{|w|}$

Ex: $f(x) = \sin \frac{۳\pi}{۲} x \Rightarrow P = \frac{۲\pi}{\frac{۳\pi}{۲}} = \frac{۴}{۳}$

$f(x) = \cos \frac{۵\pi}{۴} n x \Rightarrow P = \frac{۲\pi}{\frac{۵\pi}{۴}} = \frac{۸}{۵}$

روابط زیر به سادگی قابل اثبات هستند؟

$$\int_d^{d+P} f(t)\,dt = \int_0^P f(t)\,dt = \int_{-P/۲}^{P/۲} f(t)\,dt \qquad f(t+P) = f(t)$$

۱) $$\int_d^{d+P} \cos \frac{۲n\pi}{P} t \, dt = 0$$

۲) $$\int_d^{d+P} \sin \frac{۲n\pi}{P} t \, dt = 0$$

SAHEL NOTEBOOK

Scanned by CamScanner

Subject:
Year: ۸ Month: Date:

۳) $\int_{d}^{d+p} \cos \frac{2n\pi}{p} t\,dt \cos \frac{2m\pi}{p} t\,dt = \begin{cases} p/2 & m=n \\ 0 & m \neq n \end{cases}$

۴) $\int_{d}^{d+p} \sin \frac{2n\pi}{p} t\,dt \sin \frac{2m\pi}{p} t\,dt = \begin{cases} p/2 & m=n \\ 0 & m \neq n \end{cases}$

۵) $\int_{d}^{d+p} \sin \frac{2n\pi}{p} t \cos \frac{2m\pi}{p} t\,dt = 0$

سری فوریه:

سری فوریه تابع متناوب $f(t)$ با دوره تناوب p به صورت زیر است:

$$(*)\quad f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2n\pi}{p} t + b_n \sin \frac{2n\pi}{p} t\right)$$

تابع اگر دوره تناوب نداشته باشد (متناوب نباشد) سری فوریه نمی باشد

محاسبه a_0: برای محاسبه a_0 از طرفین رابطه $(*)$ انتگرال می گیریم.

$$\int_{d}^{d+p} f(t)\,dt = \int_{d}^{d+p} a_0\,dt + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{d}^{d+p} \cos \frac{2n\pi}{p} t\,dt \right. +$$

$$\left. b_n \int_{d}^{d+p} \sin \frac{2n\pi}{p} t\,dt \right) \Rightarrow$$

(the integrals of cos and sin are crossed out and marked 0)

SAHEL NOTEBOOK

Scanned by CamScanner

Subject:

Year: 9 Month: Date:

$$\Longrightarrow \int_{d}^{d+P} f(t)\,dt = a_0\, t \Big|_{d}^{d+P} = a_0 P$$

$$\Longrightarrow a_0 = \frac{1}{P} \int_{d}^{d+P} f(t)\,dt$$

محاسبه a_m = برای محاسبه a_m ها طرفین رابطه (*) را در $\cos \frac{2m\pi}{P} t$ ضرب می‌کنیم. پس داریم:

$$f(t)\cos \frac{2m\pi}{P} t = a_0 \cos \frac{2m\pi}{P} t + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(a_n \cos \frac{2n\pi}{P} t \cos \frac{2m\pi}{P} t + b_n \sin \frac{2n\pi}{P} \cos \frac{2m\pi}{P} t\Big)$$

با انتگرال گیری روی بازه $[d, d+P]$ داریم:

$$\int_{d}^{d+P} f(t) \cos \frac{2m\pi}{P} t\,dt = a_0 \underbrace{\int_{d}^{d+P} \cos \frac{2m\pi}{P} t\,dt}_{0} +$$

با استفاده از رابطه ۱ صفر می‌شود

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big(a_n \int_{d}^{d+P} \cos \frac{2n\pi}{P} + \cos \frac{2m\pi}{P} t\,dt +$$

$$b_n \underbrace{\int_{d}^{d+P} \sin \frac{2n\pi}{P} t \cos \frac{2m\pi}{P} t\,dt}_{0}\Big)$$

SAHEL NOTEBOOK

Scanned by CamScanner

Subject:
Year: ۱۰ Month: Date:

$$\Rightarrow \int_{d}^{d+p} f(t) \cdot \cos \frac{2m\pi}{p} t \, dt = \frac{p}{2} a_m$$

$$\Rightarrow a_m = 2/p \int_{d}^{d+p} f(t) \cos \frac{2m\pi}{p} t \, dt$$

بطور مشابه داریم:

$$b_m = 2/p \int_{d}^{d+p} f(t) \sin \frac{2m\pi}{p} t \, dt$$

برای محاسبه طبق جواب قبلی بجای cos ها sin می‌گذاریم.

$$I = \int x \sin nx \, dx = \begin{cases} u = x & \rightarrow du = dx \\ dv = \sin x \, dx & v = 1/n \cos nx \end{cases}$$

$$I = \frac{-x}{n} \cos nx + \int 1/n \cos nx \, dx$$

$$= -\frac{x}{n} \cos nx + 1/n^2 \sin nx + C$$

$$I = \int x \cos nx \, dx = \frac{x}{n} \sin nx + \frac{1}{n^2} \cos nx + c$$

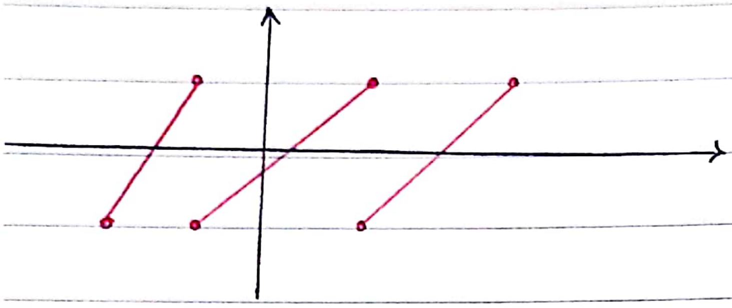
Scanned by CamScanner

Subject:

Year: ۱۱ Month: Date:

مثال: سری فوریه تابع $f(t)=t$ برای $-\pi \leq t \leq t$ بنویسید.

$p = 2\pi$ دوره تناوب



$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\, dt = 0$$

$$a_n = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t \cos nt\, dt = \frac{1}{\pi}\left(\frac{t}{n}\sin nt + \frac{1}{n^2}\cos nt\right)$$

$$\Big|_{-\pi}^{\pi} \Rightarrow a_0 = \frac{1}{\pi}\left(\left(\frac{\pi}{n}\sin n\pi + \frac{1}{n^2}\cos n\pi\right) - \left(\frac{(-\pi)}{n}\sin(-n\pi) + \frac{1}{n^2}\cos(-n\pi)\right)\right) = 0$$

$$b_n = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t \sin nt\, dt = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{t}{n}\cos nt + \frac{1}{n^2}\sin nt\right)$$

$$\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi}\left(\left(\frac{-\pi\cos n\pi}{n} + \frac{1}{n^2}\sin n\pi\right) - \left(\frac{\pi}{n}\cos n\pi + \frac{1}{n^2}\sin(-n\pi)\right)\right) = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{2\pi}{n}(-1)^n\right) = -\frac{2}{n}(-1)^n$$

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2}{n}(-1)^n \sin nt\right)$$

SAHEL NOTEBOOK

Scanned by CamScanner

Subject:
Year: ۱۲ Month: Date:

سری‌های فوریه زوج و فرد:

قضیه: اگر تابع متناوب f زوج باشد آنگاه ضرایب سری فوریه آن به صورت

زیر است:

$$a_n = \frac{4}{P}\int_0^{P/2} f(t)\cos\frac{2n\pi}{P}t\,dt$$

$$a_0 = \frac{2}{P}\int_0^{P/2} f(t)\,dt$$

و برای هر n، $b_n = 0$

قضیه: اگر تابع متناوب f فرد باشد آنگاه برای هر n، $a_n = 0$ ، $a_0 = 0$ و

و

$$b_n = \frac{4}{P}\int_0^{P/2} f(t)\sin\frac{2n\pi}{P}t\,dt$$

مثال: سری فوریه تابع $f(t) = 4 - t^2$ ، $-2 \le t \le 2$ ، $(P = 4)$ را بنویسید

و سپس به کمک آن $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ را بدست آورید.

چون تابع f زوج است $b_n = 0$

$$a_0 = \frac{2}{4}\int_0^2 (4 - t^2)\,dt =$$

$$\frac{1}{2}\left(4t - \frac{1}{3}t^3\right)\Big|_0^2 = \frac{1}{2}\left(8 - \frac{8}{3}\right) = \frac{8}{3}$$

$$a_n = \frac{4}{4}\int_0^2 (4 - t^2)\cos\frac{2n\pi}{4}t\,dt = \int_0^2 (4 - t^2)\cos\frac{n\pi}{2}t\,dt$$

SAHEL NOTEBOOK

Scanned by CamScanner

Subject:
Year: ۱۳ Month: Date:

$$\int \cos ax \, dx = \frac{1}{a} \sin ax + c$$

$$\int x^2 \cos ax \, dx = \frac{2x}{a^2} \cos ax + \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2}{a^3} \right) \sin ax$$

جواب مثال قبل :

$$= 4 \int_0^2 \cos \frac{n\pi}{2} t \, dt - \int_0^2 t^2 \cos \frac{n\pi}{2} t \, dt$$

$$= \frac{4}{\frac{n\pi}{2}} \sin \frac{n\pi}{2} \Big|_0^2 - \frac{2t}{\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2} \cos \frac{n\pi}{2} t \Big|_0^2 + \left(\frac{t^2}{\frac{n\pi}{2}} - \frac{2}{\left(\frac{n\pi}{2}\right)^3} \right)$$

$$\sin \frac{n\pi}{2} + \Big|_0^2 = \frac{-4}{\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2} (-1)^n = \frac{16}{n^2\pi^2} (-1)^{n+1}$$

پس :

$$f(t) = \frac{8}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16(-1)^{n+1}}{n^2 \pi^2} \cos \frac{n\pi}{2} t$$

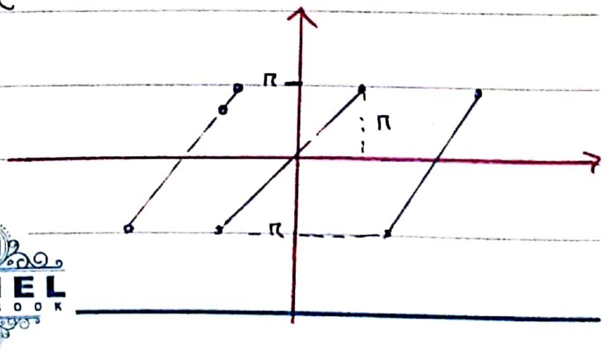
$$t = 0 \longrightarrow 4 = \frac{8}{3} + \frac{16}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{4 - 8/3}{\frac{16}{\pi^2}} = \frac{4/3}{16/\pi^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

سری فوریه

$$f(t) = t \qquad -\pi \leq t \leq \pi$$

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2}{n} (-1)^n \sin nt$$



Scanned by CamScanner

Subject:
Year: ۱۴ Month: Date:

قضیه دیریکله: اگر تابع متناوب و کراندار f در هر دوره تناوب دارای تعدادی متناهی ماکسیمم و مینیمم موضعی باشد و همچنین پیوسته قطعه‌ای باشد آن گاه سری فوریه $f(t)$ در نقاط پیوسته به $f(t)$ و در نقاط ناپیوسته به

$\frac{\text{حد چپ} + \text{حد راست}}{2}$ همگرا است.

قضیه: انتگرال هر تابع متناوب که شرایط قضیه دیریکله را دارد می‌توان با انتگرال گیری جمله به جمله سری فوریه آن بدست آورد.

مثال: سری فوریه تابع $f(t)=t^2$ ، $-1\le t\le 1$ را بدست آورید.

سری فوریه تابع فوق به صورت زیر است:

$$f(t)=t=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-2}{n\pi}(-1)^n\sin n\pi t$$

$$\Rightarrow \int t\,dt=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-2(-1)^n}{n\pi}\int \sin n\pi t\,dt\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}t^2+c=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-2(-1)^n}{n\pi}\left(-\frac{1}{n\pi}\cos n\pi t\right)$$

$$t=0\longrightarrow c=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)(-1)^{n+1}}{n^2\pi^2}=-\frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=-\frac{2}{\pi^2}\left(\frac{\pi^2}{12}\right)=-\frac{1}{6}$$

SAHEL NOTEBOOK

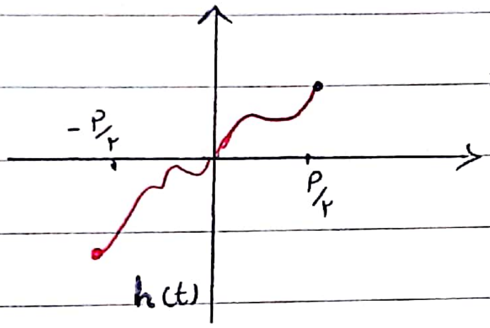
Scanned by CamScanner

ادامه حل مثال قبل:

$$\Rightarrow \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)(-1)^{n+1}}{n^2\pi^2}\cos n\pi t$$

$$\Rightarrow t^2 = \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{(-4)(-1)^{n+1}}{n^2\pi^2}}_{\frac{4(-1)^n}{n^2\pi^2}} \cos n\pi t$$

بسط نیم دامنه‌ای:



تعمیم تابع f

$$f^*(t) = \begin{cases} f(t) & 0 \leq t \leq P/2 \\ h(t) & -P/2 \leq t \leq 0 \end{cases}$$

تابع تعمیم f^*

سری فوریه f^* را بدست آورید و برای $0 \leq t \leq P/2$، سری فوریه f بدست آورید.

$$f^*(t) = \begin{cases} f(t) & 0 \leq t \leq P/2 \\ f(-t) & -P/2 \leq t \leq 0 \end{cases}$$

تعمیم زوج تابع

$$f^*(t) = \begin{cases} f(t) & 0 \leq t \leq P/2 \\ -f(-t) & -P/2 \leq t \leq 0 \end{cases}$$

تعمیم فرد

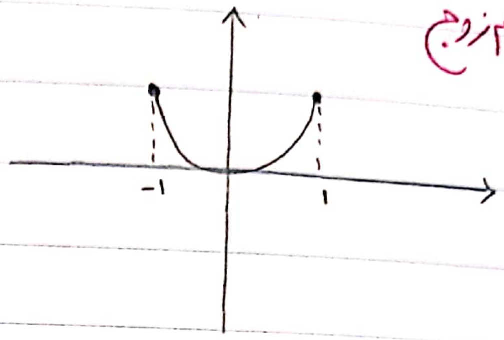
SAHEL NOTEBOOK
Scanned by CamScanner

Subject:
Year: ١٦ Month: Date:

مثال: بسط‌های نیم دامنه‌ای زوج و فرد تابع $f(t)=t^2$ ، $0\le t\le 1$ را بنویسید.

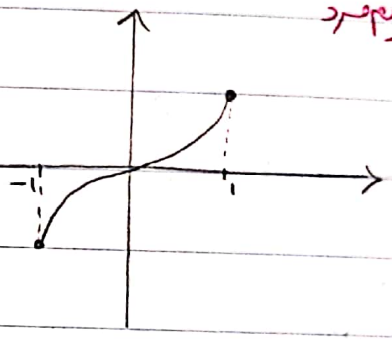
تعمیم زوج

$$f^*(t)\begin{cases} t^2 & 0\le t\le 1 \\ t^2 & -1\le t\le 0 \end{cases}$$



تعمیم فرد

$$f^*(t)\begin{cases} t^2 & 0\le t\le 1 \\ -t^2 & -1\le t\le 0 \end{cases}$$



SAHEL

Scanned by CamScanner

Subject: ۹۸/۸/۴
Year: ۱۷ Month: Date:

جلسه چهارم

اعداد مختلط : Complex number

ضرب دکارتی

یادآوری : $A \times B = \{(a,b) \mid a \in A , b \in B\}$

$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

تعریف اعداد مختلط : روی $\mathbb{R}^2$ ضرب و جمع را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$(a,b) + (c,d) = (a+c , b+d)$

$(a,b)(c,d) = (ac - bd , ad + bc)$

$(a,b)(1,0) = (a,b)$

Ex. $(\overset{a}{1},\overset{b}{2})(\overset{c}{3},\overset{d}{-1}) = (3-(-2)) , (-1+6) = (5,5)$

$(\overset{a}{4},\overset{b}{-3})(\overset{c}{-1},\overset{d}{2}) = (4-(-2)) , (8+(3)) = (2,11)$

$(a,0)(b,0) = (ab,0)$

$(0,1)(b,0) = (0,b)$

$(0,1)(0,1) = (-1,0)$

$i = (0,1)$

$i^2 = -1$

SAHEL NOTEBOOK

Scanned by CamScanner

Subject:
Year: ۱۴   Month: Date:

$(a,0) = a$

$(a,b) = (a,0) + (0,b)$

$= (a,0) + (0,1)(b,0)$

$= a + ib$

مجموعه اعداد مختلط را با $\mathbb{C}$ نشان می‌دهیم و اعضای آن را با z ، w و ... نشان می‌دهیم.

Ex:/

$z_1 = 3 + 2i \quad , \quad z_2 = 2 + 5i$

$z_1 + z_2 = 5 + 7i$

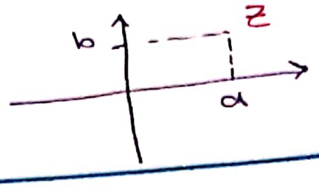
$z_1 z_2 = (3+2i)(2+5i) = 6 + 15i + 4i + \overset{-10}{\overline{10i^2}} =$

$\Rightarrow -4 + 19i$

Ex:/ $z_1 = -3 - 7i \quad , \quad z_2 = 4 + i$

SAHEL NOTEBOOK

Scanned by CamScanner



Subject:
Year: ۱۴ Month: Date:

حل:

$z_1 z_2 = -۱۲ - ۳i - ۲۸i - ۷i^2 = -۵ - ۳۱i$ (با $+۷$ نوشته‌شده بالای $-۷i^2$)

تعریف: فرض کنیم $z = a + ib$ یک عدد مختلط باشد به a قسمت حقیقی می‌نویسیم و با $Re(z)$ نشان می‌دهیم و به b قسمت مجازی (موهومی) z گفته و با $Im(z)$ نشان می‌دهیم.

Ex:/

$z = ۳ + ۲i$
$Re(z) = ۳$
$Im(z) = ۲$

$z = ۲ - ۶i$
$Re(z) = ۲$
$Im(z) = -۶$

تعریف: مزدوج عدد مختلط $z = a + ib$ را با $\bar{z}$ نشان داده و قرینه نقطه z نسبت به محور xها تعریف می‌کنیم پس: $\bar{z} = a - ib$

۱) $\overline{(\bar{z})} = z$

۲) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

۳) $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$

SAHEL NOTEBOOK

Scanned by CamScanner

Subject:
Year: ۲۰ Month: Date:

تعریف: فرض کنیم $z = a + ib$ اندازه z را با $|z|$ نشان داده و برابر

است با: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ (فاصله نقطه از مبدأ)

Ex:/ $z = 3 + 4i$

$\bar{z} = 3 - 4i$

$|z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

$z = a + ib$, $\bar{z} = a - ib$

$z\bar{z} = a^2 - i^2 b^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$

(هر عددی در مزدوجش ضرب شود می‌شود اندازه‌ی آن به توان ۲)

مثال: فرض کنیم $z_1 = 3 - i$ و $z_2 = 2 + 5i$ مطلوبست محاسبه:

در مزدوجش ضرب می‌کنیم

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3-i}{2+5i} \times \frac{2-5i}{2-5i} = \frac{6 - 15i - 2i + 5i^2}{4 + 25} = \frac{1 - 17i}{29}$$

($5i^2 = -5$)

$$\Rightarrow \frac{1}{29} - \frac{17}{29} i$$

SAHEL NOTEBOOK

Scanned by CamScanner

Subject:
Year: Month: Date:

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{2+5i}{3-i} \times \frac{3+i}{3+i} = \frac{6+2i+15i+5i^2}{9+1} = \frac{1+17i}{10}$$

($5i^2 = -5$)

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \left|\frac{z_1}{z_2}\right|$$

$z = a+ib$

$\bar{z} = a-ib$

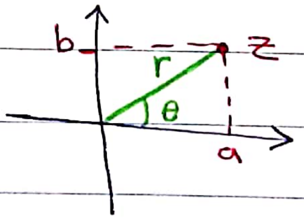
$$\Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2}(z+\bar{z}) \\ b = \frac{1}{2i}(z-\bar{z}) \end{cases}$$

تذکر: فرض کنیم $z=\bar{z}$ آنگاه z یک عدد حقیقی است.

Ex:/ $z = 3-i$, $z^2 = 9-6i+i^2 = 8-6i$ ($i^2=-1$)

فرم قطبی اعداد مختلط:

$z = a+ib$



$$\begin{cases} r = \sqrt{a^2+b^2} \\ \theta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) \quad (a \neq 0) \end{cases}$$

$\cos\theta = \frac{a}{r} \rightarrow a = r\cos\theta$

$\sin\theta = \frac{b}{r} \rightarrow b = r\sin\theta$

⇓

$$z = r\cos\theta + r\sin\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$$

SAHEL NOTEBOOK

Scanned by CamScanner

Subject:
Year: ۲۲ Month: Date:

قضیه اویلر : (Euler)

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

$\tan\frac{\pi}{4} = 1 = \tan\frac{5\pi}{4}$

$e^{x}\cdot e^{y} = e^{x+y}$

$\tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3} \ , \ \tan\frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}$

$(e^{x})^{n} = e^{nx}$

$\tan\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} \ , \ \tan\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\frac{e^{x}}{e^{y}} = e^{x-y}$

$\tan -\frac{\pi}{3} = \tan\frac{5\pi}{3} = -\sqrt{3}$

مثال: فرم قطبی اعداد زیر را بدست آورید.

$a = 1 , b = 1$

1) $z = 1 + i$

$r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$\theta = \tan^{-1}\frac{1}{1} = \tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow z = \sqrt{2}\, e^{\frac{i\pi}{4}}$

2) $z = \sqrt{3} - i$

$r = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2$

$z = 2e^{-\frac{i\pi}{6}} = 2e^{\frac{11i\pi}{6}}$

$\theta = \tan^{-1}\frac{-1}{\sqrt{3}} = \tan^{-1} -\frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{\pi}{6}$

SAHEL NOTEBOOK

Subject: ۹۸/۸/۱۱
Year: ۲۳ Month: Date:

جلسه پنجم

مثال: فرض کنیم $z = \frac{\sqrt{3}-i}{1+i}$ ، z^{15} را بدست آورید.

✓ $z_1 = \sqrt{3} - i \quad , r = |z_1| = 2 \quad , \theta = \tan^{-1} \frac{-1}{\sqrt{3}} = -\frac{\pi}{6}$

$z_1 = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$

✓ $z_2 = 1+i \, , \, r = |z_2| = \sqrt{2} \, , \, \theta = \tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4}$

$z_2 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$

$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{2e^{-i\frac{\pi}{6}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}} = \sqrt{2}\, e^{i(-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4})} = \sqrt{2}\, e^{\frac{-5\pi i}{12}}$

✓ $z^{15} = (\sqrt{2})^{15} e^{\frac{-75}{12} i\pi} = (\sqrt{2})^{15} e^{\frac{-3i\pi}{12}} = (\sqrt{2})^{15} e^{-\frac{i\pi}{4}}$

Ex:/ $\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{-2-2i}\right)^{7}$

$z_1 = -1 + i\sqrt{3} \, , r = |z_1| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2 \, , \theta_1 = \tan^{-1} \frac{\sqrt{3}}{-1} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

$z_2 = -2 - 2i \, , r = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2} \, , \theta_2 = \tan^{-1} \frac{-2}{-2} = \pi + \frac{\pi}{4} = 5\frac{\pi}{4}$

$z_1 = 2e^{\frac{2i\pi}{3}} \quad , \quad z_2 = 2\sqrt{2}\, e^{\frac{5i\pi}{4}}$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2e^{\frac{2i\pi}{3}}}{2\sqrt{2}\,e^{\frac{5i\pi}{4}}} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i(\frac{2\pi}{3}-\frac{5\pi}{4})} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{-7i\pi}{12}}$

$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^7 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^7 e^{-\frac{49}{12}i\pi} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^7 e^{\frac{-i\pi}{12}}$

SAHEL NOTEBOOK

Scanned by CamScanner

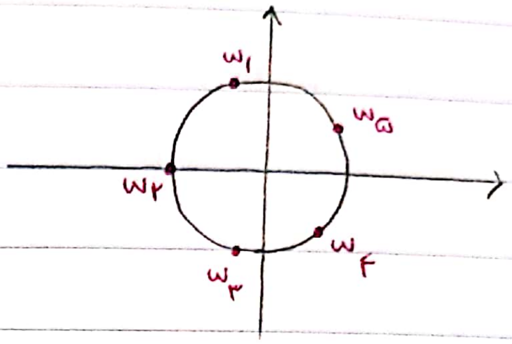
Subject:
Year: ۹۶ Month: Date:

$K=1 \longrightarrow \omega_1 = e^{\frac{3\pi}{5}i}$

ω_4 و ω_5 مزدوج هم هستند

ω_1 و ω_3 مزدوج هم هستند

$K=2 \longrightarrow \omega_2 = e^{\frac{5\pi}{5}i} = e^{\pi i} = -1$



$K=3 \longrightarrow \omega_3 = e^{\frac{7\pi}{5}i}$

$K=4 \longrightarrow \omega_4 = e^{\frac{9\pi}{5}i}$

$K=5 \longrightarrow \omega_5 = e^{\frac{11\pi}{5}i}$

مثال: ریشه هفتم $z_0 = \sqrt{3} - i$ را بدست آورید.

$z_0 = 2e^{-\frac{i\pi}{4}} \quad , \quad z = re^{i\theta}$

$z^7 = z_0 \longrightarrow r^7 e^{7i\theta} = 2e^{i(2k\pi - \frac{\pi}{4})}$

$\Rightarrow \begin{cases} r^7 = 2 \\ 7\theta = 2k\pi - \frac{\pi}{4} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} r = 2^{1/7} \\ \theta = \frac{2k\pi - \pi/4}{7} \end{cases}$

$\omega_k = 2^{1/7} e^{\frac{2k\pi - \pi/4}{7} i} \qquad k = 1, 2, \ldots, 7$

SAHEL

Scanned by CamScanner

Subject:
Year: ۲۷ Month: Date:

مثال: ریشه دوم $z = ۳ + ۴i$ را بدست آورید.

فرض کنیم $z = x + iy = re^{i\theta}$ در این صورت:

$$z^{1/۲} = \pm\left(\sqrt{\frac{r+x}{۲}} \pm i\sqrt{\frac{r-x}{۲}}\right)$$

($+$ برای $y>0$ و $-$ برای $y<0$)

$$= \pm\left(\sqrt{\frac{r+x}{۲}} + \mathrm{Sgn}(y)\, i\sqrt{\frac{r-x}{۲}}\right)$$

حل:

$x = ۳ \ , \ y = ۴ \longrightarrow r = ۵$

$$z^{1/۲} = \pm\left(\sqrt{\frac{۵+۳}{۲}} + \sqrt{\frac{۵-۳}{۲}}\right) = \pm(۲ + i)$$

جلسه ششم ۶۵ ۹۸/۸/۱۸

مثال: مکان هندسی نقاطی را بیابید که $|z| = 1$ باشد.

$z = x + iy \longrightarrow |z|^۲ = x^۲ + y^۲$

$|z| = 1 \longrightarrow |z|^۲ = 1 \longrightarrow x^۲ + y^۲ = 1$ دایره به مرکز مبدا و شعاع ۱

$$(x-\alpha)^۲ + (y-\beta)^۲ = y^۲$$

دایره به مرکز (α, β) و شعاع ۲

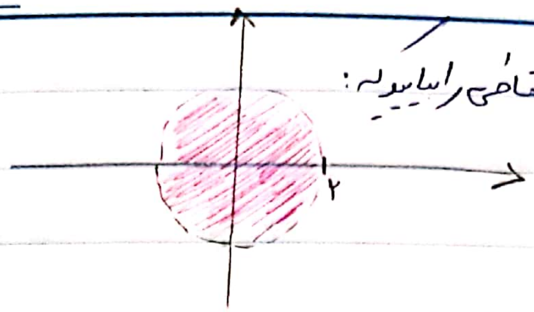
SAHEL NOTEBOOK

Scanned by CamScanner

Subject:
Year. ۹۸ Month: Date:

Ex:/ $|z| < 2$

مکان هندسی نقاطی را بیابید:



Ex:/ $|z+1| = 3|z-1|$ (علامت اندازه)

مکان هندسی نقاطی را بیابید:

$$|z+1|^2 = 9|z-1|^2$$

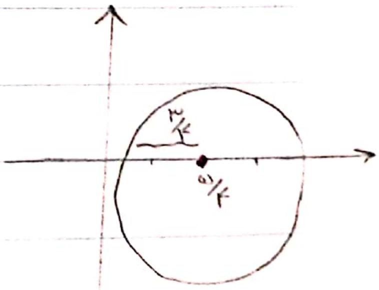
$z = x+iy$, $z+1 = x+1+iy \longrightarrow |z+1|^2 = (x+1)^2+y^2$

$z-1 = x-1+iy \longrightarrow |z-1|^2 = (x-1)^2+y^2$

$\Rightarrow (x+1)^2+y^2 = 9((x-1)^2+y^2) \Rightarrow x^2+2x+1+y^2 = 9(x^2-2x+1+y^2)$

$\Rightarrow \dfrac{8x^2-20x+8y^2+8=0}{4}$

$\Rightarrow 2x^2-5x+2y^2+2=0$



$\Rightarrow 2(x-\frac{5}{4})^2 - \frac{25}{8} + 2y^2 + 2 = 0$

$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2 = r^2$

$\Rightarrow 2(x-\frac{5}{4})^2 + 2y^2 = \frac{25}{8} - 2 = \frac{9}{8}$

(α,β) مرکز , r^2 شعاع

$\Rightarrow (x-\frac{5}{4})^2 + y^2 = \frac{9}{16}$

دایره به مرکز $(\frac{5}{4}, 0)$ و شعاع $\frac{3}{4}$

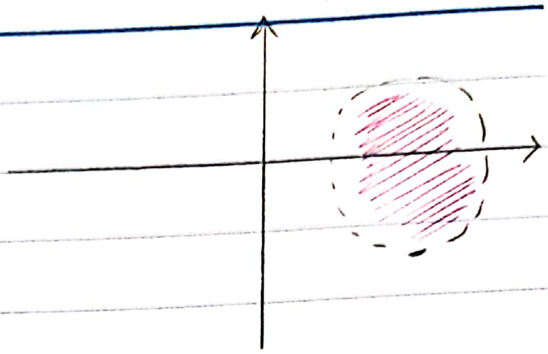
SAHEL NOTEBOOK

اندازه $\frac{1}{|z+1|}$

اندازه $\frac{1}{|z-1|}$

Subject:
Year: ۲۹/ Month: Date:

Ex:/ $|z+1| > 3|z-1|$



Ex:/ $\frac{|z+5|}{|z|} \leq 2 \Rightarrow |z+5| \leq 2|z|$

$|z+5| = 2|z|$

$z = x+iy \rightarrow |z|^2 = x^2+y^2$

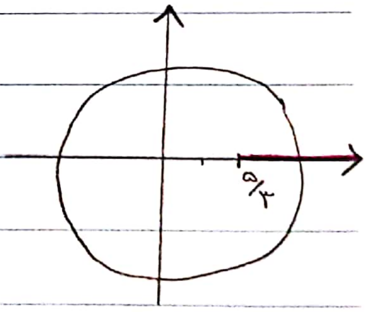
$z+5 = x+5+iy \rightarrow |z+5|^2 = (x+5)^2+y^2$

$|z+5|^2 = 4|z|^2 \Rightarrow x^2+10x+25+y^2 = 4(x^2+y^2)$

مربع کامل می‌کنیم

$\Rightarrow 3x^2 - 3y^2 - 10x = 25$

$\Rightarrow 3(x-\frac{10}{6})^2 - \frac{100}{12} + 3y^2 = 25$



$\Rightarrow 3(x-\frac{10}{6})^2 + 3y^2 = 25 + \frac{100}{12} = \frac{400}{12} = \frac{100}{3}$

$\Rightarrow (x-\frac{5}{3})^2 + y^2 = \frac{100}{9}$

دایره به مرکز $(\frac{5}{3}, 0)$ و شعاع $\frac{10}{3}$

SAHEL NOTEBOOK

Subject:

Year: ۱۴۰۲ Month: Date:

Ex:/ $|z-۲i| < |z+۲| \Rightarrow |z-۲i| = |z+۲|$

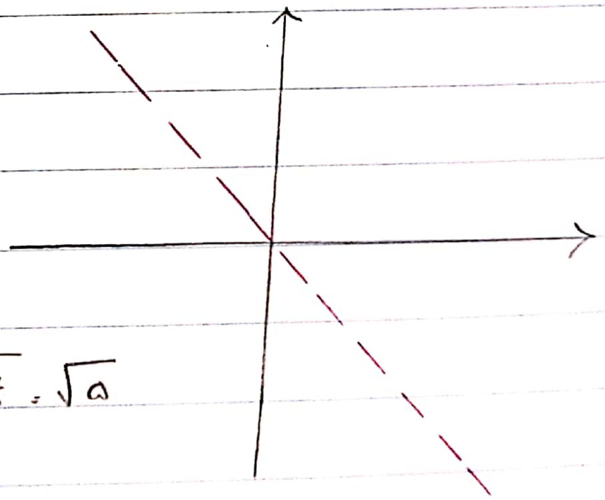
$z = x+iy$, $z-۲i = x+iy-۲i = x+(y-۲)i$

$$|z-۲i|^۲ = x^۲+(y-۲)^۲$$

$z+۲ = x+۲+iy \longrightarrow |z+۲|^۲ = (x+۲)^۲+y^۲$

$x^۲+(y-۲)^۲ = (x+۲)^۲+y^۲$

$x^۲+y^۲-۴y+۴ = x^۲+۴x+۴+y^۲ \Rightarrow -۴y = ۴x \longrightarrow y=-x$



$z=۱ \rightarrow |z-۲i| = |۱-۲i| = \sqrt{۱+۴} = \sqrt{۵}$

$|z+۲| = ۳$

$(a+b)^۳ = a^۳+۳a^۲b+۳ab^۲+b^۳$

SAHEL NOTEBOOK

Scanned by CamScanner

Subject: ۹۸،۹۲
Year: ۳۱/ Month: Date:

جلسه هفتم

توابع مختلط:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $y = f(x)$

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ n متغیره $w = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

هر تابع $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ با ضابطه $w = f(z)$ را یک تابع مختلط می‌نویسیم.

$z = x + iy$, $w = u + iv$

$f(z) = w \Rightarrow f(x+iy) = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$

Ex:/ $f(z) = z^2$ تابع است

تعریف تابع: $z_1 = z_2 \Rightarrow f(z_1) = f(z_2)$

Ex:/ $f(z) = z^{1/2}$ تابع نیست (زیرا به ازای هر z دو ریشه می‌دهد)

حد یک تابع مختلط:

فرض کنیم تابع $f(z)$ در یک همسایگی نقطه z_0 تعریف شده باشد بجز احتمالاً در z_0

می‌گوییم حد تابع $f(z)$ وقتی z به سمت z_0 میل می‌کند برابر عدد L است، هرگاه

برای هر $\varepsilon > 0$ (اپسیلن)، عدد $\delta > 0$ (دلتا) یافت شود به طوری که $0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - L| < \varepsilon$

SAHEL NOTEBOOK

Subject:
Year: ۳۲ Month: Date:

:می‌دانیم

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = L$$

$$L = u_0 + iv_0$$

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} u(x,y) + i \lim_{z \to z_0} v(x,y)$$

$$= u_0 + iv_0$$

$$\lim f(z) = L \iff \lim_{z \to z_0} u(x,y) = u_0$$

و

$$\lim_{z \to z_0} v(x,y) = v_0$$

$z = x + iy$ $\quad z \to z_0 \iff (x,y) \to (x_0, y_0)$

$z_0 = x_0 + iy_0$

Ex:/ $\lim_{z \to i+1} (z^۲ + ۳z - ۱) = (۱+i)^۲ + ۳(۱+i) - ۱$

$= ۱ + ۲i + i^۲ + ۳ + ۳i - ۱$

$= ۲ + ۵i$

SAHEL NOTEBOOK

Scanned by CamScanner

Subject:
Year: ۴۳ Month: Date:

مثال: فرض کنیم $f(x+iy) = (x^2+3xy-y)+3ixy$ مطلوبست

محاسبه $\lim f(x+iy)$ $(x,y)\to(-1,4)$

$\lim f(x+iy)$

$(-1^2+3(-1)(4)-4)+3i(-1)(4)$

$(1-12-4)+i(-12)$

$-15-12i$

پیوستگی: تابع f را در $z=z_0$ پیوسته گوییم هرگاه $\lim_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$

تعریف مشتق: مشتق تابع $f(z)$ در نقطه z_0 را با $f'(z_0)$ یا $\left(\frac{df}{dz}\bigg|_{z=z_0}\right)$

نشان می دهیم و به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$f'(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

یا

$$f'(z_0)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$$

مشروط به آن که حدهای فوق موجود باشند.

SAHEL NOTEBOOK

Scanned by CamScanner

Subject:
Year: ۳۲ Month: Date:

مثال: مشتق تابع $f(z)=z^{2}$ را بدست آورید.

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{(z+\Delta z)^{2}-z^{2}}{\Delta z}$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{z^{2}+2z\Delta z+\Delta z^{2}-z^{2}}{\Delta z}$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta z(2z+\Delta z)}{\Delta z}=2z$$

$z=x+iy$

$\Delta z=\Delta x+i\Delta y$

$$\Delta z\to 0 \iff \begin{cases}\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0\end{cases}$$

SAHEL NOTEBOOK

Scanned by CamScanner

Subject:
Year: ۳۵ Month: Date:

مثال: تابع $f(z)=\bar{z}$ در هیچ نقطه‌ای مشتق پذیر نیست.

توابع تحلیلی: تابع f را در نقطه z تحلیلی یا منتظم گوییم هرگاه f در یک همسایگی از z مشتق پذیر باشد. در این صورت گوییم f بر این همسایگی تحلیلی است.

تذکر: توابع چند جمله‌ای $p(z)=a_n z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\dots+a_1 z+a_0$

و توابع گویا $\frac{p(z)}{q(z)}$ (p و q چند جمله‌ای) در هر نقطه دامنه‌شان تحلیلی هستند.

Ex:1 $f(z)=\frac{z^3-2z+1}{z^2+1}$

(z یعنی عدد مختلط است)

$z^2+1=0 \longrightarrow z=\pm i$

معادلات کوشی - ریمان:

قضیه: اگر $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ در نقطه $z=x+iy$ مشتق پذیر باشد آنگاه مشتقات جزئی مرتبه اول u و v در این نقطه موجودند و در معادلات زیر که به معادلات کوشی - ریمان معروف است صدق می‌کنند.

$u_x(x,y)=v_y(x,y)$

$u_y(x,y)=-v_x(x,y)$

SAHEL NOTEBOOK

Scanned by CamScanner

Subject:
Year: ۳۶ Month: Date:

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$u_y = \frac{\partial u}{\partial y}$$

مثال: تابع $f(z) = \bar{z}$ در هیچ نقطه‌ای مشتق‌پذیر نیست.

$z = x + iy \quad , f(z) = \bar{z} = x - iy$

$$\begin{cases} u(x,y) = x \\ v(x,y) = -y \end{cases} \quad , u_x = 1 \quad , v_y = -1$$

$u_x \neq v_y$

مشتق‌پذیر نیست (چون $u_x \neq v_y$ نیست)

مثال: $f(z) = z^2$ در همه نقاط تحلیلی است؟ (مشتق‌پذیر)

$z = x + iy \, , f(z) = z^2 = (x+iy)^2$

$$= x^2 + 2ixy + i^2y^2$$

$$= x^2 - y^2 + i(2xy)$$

پس:

$v(x,y) = 2xy \quad , u(x,y) = x^2 - y^2$

$u_x = 2x \quad , v_y = 2x$ (در همه نقاط تحلیلی وجود دارد)

$u_y = -2y \quad , v_x = 2y$

SAHEL NOTEBOOK

Scanned by CamScanner

Subject:
Year: ۳۷ Month: Date:

قضیه: اگر u و v توابعی دو متغیره با مشتقات جزیی مرتبه اول پیوسته باشند که روی ناحیه D در معادلات کوشی - ریمان صدق می‌کنند، در این صورت تابع مختلط $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ روی D تحلیلی است.

تعریف: تابع f را تام گوییم هرگاه در تمام نقاط صفحه تحلیلی باشد.

تمرین: $f(z)=z^{3}$ تام است.

$z=x+iy \to z^{3}=(x+iy)^{3}$

چون $u_x=u_y$ و $u_y=-v_x$ پس

$=x^{3}+3ix^{2}y+3i^{2}xy^{2}+i^{3}y^{3}$

تابع f در هر نقطه مشتق‌پذیر است.

$(a+b)^{3}=a^{3}+3a^{2}b+3ab^{2}+b^{3}$

$\begin{cases} i^{3}=-i \\ i^{2}=-1 \end{cases}$

$=x^{3}-3xy^{2}+3ixy^{2}-iy^{3}$

$=x^{3}-3xy^{2}+i(3x^{2}y-y^{3})$

$\begin{cases} u=x^{3}-3xy \\ v=3x^{2}y-y^{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} u_x=u_y \\ v_y=-v_y \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} u_x=3x^{2}-3xy^{2} \\ u=3x^{2}-3xy^{2} \\ u_y=-6xy \\ v_x=6xy \end{array}$

SAHEL NOTEBOOK

Subject: ۳۸ Year: ۹۸ Month: ۹ Date: ۱۶

جلسه هشتم:

توابع همساز (توافقی): تابع دو متغیره $Q(x,y)$ را در یک تابع همساز یا هارمونیک

گوییم و هرگاه $Q_x x + Q_y y = 0$

مثال: نشان دهید تابع $Q(x,y) = x^2 + 7x - y^2 - 6y + 4$ هارمونیک است.

$Q_x = 2x + 7$ $\qquad$ $Q_y = -2 - 6$

$Q_{xx} = 2$ $\qquad$ $Q_{yy} = -2$

چون جمع صفر است پس هارمونیک است. $Q_x x + Q_y y = 2 - 2 = 0$

مثال: تابع $Q(x,y) = x^3 y + 5xy - 2y^2 + 1$ هارمونیک است.

$Q_x = 3x^2 y + 5y$ $\qquad$ $Q_y = x^3 + 5x - 6y$

$Q_{xx} = 6xy$ $\qquad$ $Q_{yy} = -4$

هارمونیک نیست. $Q_x x + Q_y y = 6xy - 4 \neq 0$

توابع مختلط مهم:

۱- تابع نمایی: تابع نمایی مختلط را به صورت زیر تعریف می کنیم.

SAHEL NOTEBOOK

Scanned by CamScanner

$z = x + iy$

$e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$

خواص توابع نمایی:

۱) $f(z) = e^z \longrightarrow f'(z) = e^z$

$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$

$f'(z) = u_x(x,y) + iv(x,y)$

۲) تابع e^z تابعی متناوب با دوره تناوب $2k\pi$ است.

$f(z + 2k\pi i) = f(z)$

۳) تابع e^z تابعی تام است.

۲ـ تابع مثلثاتی: می‌دانیم $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ ، $e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

$\Longrightarrow$ پس:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Scanned by CamScanner

Subject: ~~۴۰~~
Year: Month: Date:

چون تابع نمایی $2\pi i$ است پس $\sin z$ و $\cos z$، 2π است.

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$$

$$\cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$$

هذلولوی (hyperbolic)

$$\sinh x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{۲} \qquad \sinh z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{۲}$$

$$\Longrightarrow$$

$$\cosh x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{۲} \qquad \cosh z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{۲}$$

خواص تابع هذلولوی :

$$\cosh(iz) = \cos z \Longrightarrow ch\,z = \cosh z$$

$$\sinh(iz) = i \sin z \Longrightarrow sh\,z = sh\,hz$$

$$\cos(iz) = \frac{e^{i(iz)} + e^{-i(iz)}}{۲} = \frac{e^{-z} + e^{z}}{۲} = \cosh z$$

$$\sin(iz) = \frac{e^{i(iz)} - e^{-i(iz)}}{۲i} = \frac{e^{-z} - e^{z}}{۲i} = -\frac{1}{i}\left(\frac{e^{z} - e^{-z}}{۲}\right)$$

$$= \sinh z$$

SAHEL NOTEBOOK

Scanned by CamScanner

Subject: ۴۱
Year: Month: Date:

تابع لگاریتمی طبیعی: این تابع را با $Ln z$ نشان می‌دهیم:

$w = \ln z \Longleftrightarrow z = e^{w}$

فرض کنیم $w = u + iv$ و $z = x + iy = re^{i\theta}$:

$\Rightarrow re^{i\theta} = e^{u+iv} = e^{u} \cdot e^{iv}$

$\Rightarrow \begin{cases} r = e^{u} \\ \theta = v \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u = \ln r \\ v = \theta \end{cases} \qquad 0 < \theta \leq 2\pi$

$Ln\, z = \ln r + i\theta$

مشتق $Ln(x)$:

مثال: مشتق تابع $f(z) = Ln z$ را بدست آورید.

$z = x + iy = re^{i\theta}$

$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad , \quad \theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}$

$f(z) = Ln(z) = Ln r + i\theta = Ln\sqrt{x^2+y^2} + i\tan^{-1} \frac{y}{x} = \frac{1}{2} Ln(x^2+y^2)$

$+ i\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$

SAHEL NOTEBOOK

Scanned by CamScanner

Subject: ۴۲
Year: Month: Date:

$$f(z) = \frac{۲x}{۲(x^۲+y^۲)} + i\frac{-\frac{y}{x^۲}}{1+(-\frac{y}{x})^۲} = \frac{x}{x^۲+y^۲} - \frac{iy}{x^۲+y^۲} = \frac{x-iy}{x^۲+y^۲}$$

$$\frac{\bar{z}}{z.\bar{z}} = \frac{1}{z}$$

مثال: مشتق توابع زیر را بدست آورید.

۱) $f(z) = Ln(z^۳ - ۵z + 1)$

$$f'(z) = \frac{۳z^۲ - ۵}{z^۳ - ۵z + 1}$$

۲) $f(z) = Ln(\frac{z+۳}{z+۵})$

$$Ln(\frac{a}{b}) = Lna - Lnb$$

$$(Ln(z+۳) - Ln(z+۵) = f'(z) = \frac{1}{z+۳} - \frac{1}{z+۵}$$

۳) $t(z) = Ln(\frac{(z+1)^۲(z-۴)}{z-۷})$

$$Lnab = Lna + Lnb$$

$$Lna^n = nLna$$

$$= Ln((z+1)^۲ = (z+1)) - Ln(z-۷)$$

$$= Ln(z+1)^۲ + Ln(z-۴) - Ln(z-۷)$$

SAHEL
NOTEBOOK

$$= ۲Ln(z+1) + Ln(z-۴) - Ln(z-۴) \Rightarrow f'(z) = \frac{۲}{z+1} + \frac{1}{z+۴} - \frac{1}{z-۷}$$

Scanned by CamScanner

Subject: ۴۳

مثال: تابع $Ln z$ را برای $z = ۲ + ۲\sqrt{۳}i$ بدست آورید.

$z = ۲ + ۲\sqrt{۳}i$ ، $r = |z| \sqrt{۴+۱۲} = ۴$

$\bar{z} = ۲ - ۲\sqrt{۳}i$ $\theta = \tan^{-1}\frac{۲\sqrt{۳}}{۲} = \tan^{-1}\sqrt{۳}\ \frac{\pi}{۳}$

$Ln\,\bar{z} = Ln\,۴ - \frac{۱}{۳} i\pi$

مثال: $Ln(a \cdot b) = Ln a + Ln b$ برابر است یا خیر؟

$z_۱ = r_۱ e^{i\theta_۱}$, $z_۲ = r_۲ e^{i\theta_۲}$ $z_۱ z_۲ = r_۱ r_۲\ i(\theta_۱ , \theta_۲)$

$Ln(z_۱ z_۲) = Ln z_۱ + Ln z_۲$

$Ln z_۱ z_۲ = Ln(r_۱ r_۲) + i(\theta_۱ + \theta_۲) = Ln r_۲ + Ln r_۲ + i\theta_۱ + i\theta_۲$

$Ln z_۱ = Ln r_۱ + i\theta_۱$

$Ln z_۲ = Ln r_۲ + i\theta_۲$

$Ln z_۱ z_۲ = Ln z_۱ + Ln z_۲$ برابر است.

SAHEL NOTEBOOK

Scanned by CamScanner

مثال: قرار می‌دهیم $t = e^{iw}$

$$t^2 - 2izt - 1 = 0$$

$$t = \frac{b^2 - 4ac}{2} = \frac{2iz \pm \sqrt{4i^2z^2 - 4(1)(-1)}}{2}$$

$$t = \frac{2iz \pm \sqrt{-4z^2 + 4}}{2} = iz \pm \sqrt{1 - z^2}$$

$$e^{iw} = iz \pm \sqrt{1 - z^2}$$

منفی به درد نمی‌خورد چون

$$e^{iw} = iz + \sqrt{1 - z^2}$$

$$Ln(e^{iw}) = Ln(iz + \sqrt{1 - z^2})$$

$$iw = Ln(iz + \sqrt{1 - z^2})$$

$$w = \frac{Ln(iz + \sqrt{1 - z^2})}{i}$$

$$\sin^{-1} z = \frac{Ln(iz + \sqrt{1 - z^2})}{i} = -i\, Ln(iz + \sqrt{1 - z^2})$$

$$\cos^{-1} z = -i\, Ln(iz + \sqrt{z^2 - 1})$$

$$\tan^{-1} z = \frac{i}{2}\, Ln\left(\frac{i + z}{i - z}\right)$$

$$\sinh^{-1} z = Ln(z + \sqrt{z^2 - 1})$$

SAHEL NOTEBOOK

$$\cosh^{-1} z = Ln(z - \sqrt{z^2 - 1})$$

Scanned by CamScanner